CUPRINS

Capitolul 6

DEMONSTRAREA UNOR INEGALITĂȚI DE TIP SIMETRIC ÎN DOUĂ ȘI TREI VARIABILE

6.1. Demonstrarea unor inegalități cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale în două variabile

Considerații preliminare

Definiție

Polinomul p ∈ $\mathbb{R}[x, y]$ este simetric dacă $p(x, y) = p(y, x)$, $(\forall)$ $x, y \in \mathbb{R}$.

Foarte important de reținut: polinoamele $\sigma_1 \in \mathbb{R}[x, y]$, $\sigma_1 = x + y$ şi $\sigma_2 \in \mathbb{R}[x, y)$, $\sigma_2 = xy$ se numesc *polinoame simetrice fundamentale*.

Polinoamele simetrice fundamentale se aplică în demonstrarea unor tipuri de inegalități. La baza rezolvării acestor inegalități stă Lema 1.

Lema 1

Fie relațiile: $x + y = \sigma_1$; $xy = \sigma_2$. Pentru ca ambele numere x, y să fie reale şi pozitive este necesar şi suficient să existe condițiile: $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0, \sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0.$

Demonstrație: x, y sunt rădăcinile ecuației $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0$. Cu rădăcinile:

$$x = \frac{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2}; \quad y = \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2} \quad \text{sau}$$

$$x = \frac{\sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2}; \quad y = \frac{\sigma_1 + \sqrt{\sigma_1^2 - 4\sigma_2}}{2}.$$

Pentru ca x, y să fie reale este necesar ca $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0.$ Dacă $\sigma_1 - 4\sigma_2 = 0$, atunci $x = y$. Deci există un $z > 0$, astfel încât: $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = z$. De unde vom avea $\sigma_2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 - z\right)$ sau $\sigma_1^2 = 4\sigma_2 + z,\ x \geq 0,\ y \geq 0$, ceea ce implică: $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0.$

Reciproca: dacă $\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \geq 0,$ atunci $x, y \in \mathbb{R}$ şi dacă: $\sigma_1 \geq 0$ şi $\sigma_2 \geq 0,$ atunci implică $x \geq 0$ şi $y \geq 0$. Într-adevăr dacă $x < 0$, atunci: $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 > 0$ pentru $z = x$ şi, de asemenea: $z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 > 0$ pentru $z = x$. Deci rezultă, în mod necesar, că $x \geq 0$ şi $y \geq 0$ şi astfel propoziția este demonstrată.

Lema 2

Notăm $S_k = x^k + y^k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze următoarea relație de recurență:

$S_{k+1} = \sigma_1 S_k - \sigma_2 S_{K-1}$, $(S_0 = 2, S_1 = \sigma_1)$, $(\forall)\ k \geq 1$. (i)

Demonstrație: Înlocuind în (i) şi efectuând calculele necesare obținem:

$$x^{k+1} + y^{k+1} = (x+y)\left(x^k + y^k\right) - xy\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) = x^{k+1} + y^{k+1} + xy^k + yx^k -$$

$$- x^k y - xy^k = x^{k+1} + y^{k+1}.$$

Din (i) se deduce formula lui Waring:

$$S_k = \frac{1}{k} S_k = \sum_m \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m!(k-2m)!} \sigma_1^{k-2m} \cdot \sigma_2^m \text{ (ii).}$$

Aplicând formula (ii) calculăm $S_k(k = 3, 4, 5, 6)$ şi obținem:

$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$; $S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$; $S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$;

$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$.

Teoremă

Orice polinom simetric $p \in \mathbb{R}[x, y]$ se poate exprima în mod unic cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale.

Demonstrație: Ne bazăm pe formula (ii) din Lema 2 şi prin faptul că în polinomul simetric apar expresii algebrice de tipul: $ax^k y^k = a\sigma_2^k$ sau

$$\left.\begin{aligned} b\left(x^k y^e + x^e y^k\right) &= bx^k y^k\left(x^{e-k} + y^{e-k}\right);\ e \geq k \text{ şi} \\ b\left(x^k y^e + x^e y^k\right) &= bx^e y^e\left(x^{k-e} + y^{k-e}\right);\ k \geq e \end{aligned}\right\} \text{(iii)}$$

De exemplu: $p = xy(x^3 + y^3) + x^2y^2 + x^3y^3(x+y) = \sigma_2 S_3 + \sigma_2^2 + \sigma_2^3 S_1 =$

$= \sigma_2(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) + \sigma_2^2 + \sigma_2^2\sigma_1 = \sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_2^2 =$

$= \sigma_1^3\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_2^2 + \sigma_2^2 = \sigma_2(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2)$.

În cele ce urmează ne vom folosi de rezultatele de mai sus pentru a demonstra un număr de inegalități în două variabile punând în evidență, pentru fiecare caz în parte, esența metodei de rezolvare.

Observație: Teorema se poate extinde şi pentru toate expresiile algebrice de tip rațional, aşa cum se va constata în exemplele următoare.

Aplicații

1) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive care satisfac condiția $a + b \geq c$, atunci au loc inegalitățile $a^2 + b^2 \geq \frac{c^2}{2}$, $a^4 + b^4 \geq \frac{c^4}{2}$, $a^8 + b^8 \geq \frac{c^8}{128}$.

Generalizare: $a^{2^n}+b^{2^n}\geq\frac{c^{2^n}}{2^{n-1}}$.

Soluție. Considerăm $a + b = \sigma_1$, $ab = \sigma_2$

$$S_2=a^2+b^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=\sigma_1^2-2\frac{\sigma_1^2-z}{4}=\frac{\sigma_1^2-z}{2}\geq\frac{1}{2}\sigma_1^2\Leftrightarrow a^2+b^2\geq\frac{c^2}{2}$$

Analog $\left(a^2\right)^2+\left(b^2\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}C^2\right)^2=\frac{c^4}{8}$; $a^8+b^8=\left(a^4\right)^2+\left(b^4\right)^2\geq\frac{1}{2}\left(\frac{c^4}{8}\right)^2=\frac{1}{128}c^8$.

Prin inducție rezultă $a^{2^n}+b^{2^n}\geq\frac{1}{2^{n-1}}c^{2^n}$.

2) Să se demonstreze că dacă a, b sunt numere reale, atunci: $a^4+b^4\geq a^3b+ab^3$.

Soluție. Avem: $a^4+b^4-a^3b-ab^3=a^4+b^4-ab\left(a^2+b^2\right)=S_4-\sigma_2S_2=$

$=\sigma_1^4-4\sigma_1^2+2\sigma_2^2-\sigma_2\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)=\sigma_1^4-5\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_2^2=\frac{3}{4}\sigma_1^2z\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^4+b^4-ab\left(a^2+b^2\right)\geq 0.\ \ z=\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0.$

3) Să se deomnstreze că dacă a, b sunt numere reale pozitive avem inegalitatea:

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3.$$

Soluție. Înlocuind $a + b = \sigma_1$; $ab = \sigma_2$, obținem:

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{S_3}{2}-\frac{\sigma_1^3}{8}=\frac{1}{2}\left(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2\right)-\frac{1}{8}\sigma_1^3=\frac{3}{8}\sigma_1 z;\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,z\geq 0.$$

4) Să se demonstreze că dacă a, b sunt numere reale strict pozitive avem inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Soluție. Notăm $\sqrt{a}=u,\sqrt{b}=v.$ Inegalitatea de demonstrat devine:

$$\frac{u^2}{v}+\frac{v^2}{u}\geq u+v\Leftrightarrow u^3+v^3\geq uv(u+v).$$

Dar $u^3+v^3-uv(u+v)=S_3-\sigma_2\sigma_1=\sigma_1\left(\sigma_1^2-4\sigma_2\right)\geq 0\Leftrightarrow u^3+v^3\geq uv(u+v)$.

5) Să se demonstreze că dacă a, b sunt numere reale strict pozitive având suma 1, atunci are loc inegalitatea:

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{25}{2}$. (I.V. Maftei, G.M.)

Soluție. Înlocuind $a + b = \sigma_1$; $ab = \sigma_2$, obținem:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{25}{2}=a^2+b^2+\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}-\frac{17}{2}=S_2+\frac{S_2}{\sigma_2^2}-\frac{17}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sigma_2^2}\left(-4\sigma_2^3-15\sigma_2^2-4\sigma_2+2\right).$$

Rămâne de demonstrat că $4\sigma_2^3+15\sigma_2^2+4\sigma_2\leq 2$.

Deoarece: $\sigma_2\geq 0$ şi $z=\sigma_1^2-4\sigma_2$ rezultă $0\leq\sigma_2\leq\frac{1}{4}$.

Deci: $4\sigma_2^3+15\sigma_2^2+4\sigma_2\leq\frac{1}{16}+\frac{15}{16}+1=2.$ Cu egalitate pentru $a = b = 2$.

6) Dacă $a, b \in (0, \infty)$ şi $a^2 + b^2 = 1$, atunci avem:

$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}\geq 4+2\sqrt{2}$. (I.V. Maftei)

Soluție. Notând $a + b = \sigma_1$ şi $ab = \sigma_2$ avem: $\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}=\frac{2-\sigma_1}{1-\sigma_1+\frac{\sigma_1^2-1}{2}}=\frac{2(2-\sigma_1)}{(\sigma_1-1)^2}$.

Din $\sigma_1^2-2\sigma_2=1$ şi $\sigma_1^2\geq 4\sigma_2\Rightarrow\sigma_2\leq\frac{1}{2}$ şi $\sigma_1\leq\sqrt{2}$.

Atunci $2 - \sigma_1 \geq 2 - \sqrt{2}$ şi $(\sigma_1-1)^2\leq\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

Înlocuind direct obținem: $\frac{2(2-\sigma_1)}{(\sigma_1-1)^2}\geq\frac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=4+2\sqrt{2}$.

7) Dacă a, b sunt numere pozitive, atunci are loc inegalitatea:

$a^4+2a^3b+2ab^3+b^4\geq 6a^2b^2$.

Soluție. Înlocuind $a + b = \sigma_1$; $ab = \sigma_2$ şi $z=\sigma_1^2-4\sigma_2\geq 0$ obținem:

$$a^4+2a^3b+2ab^3+b^4-5a^2b^2=S_4+2\sigma_2S_2-6\sigma_2^2=\sigma_1^4-2S_1^2\sigma_2-8\sigma_2^2=$$

$$=\left(z+4\sigma_2^2\right)^2-2(z+4\sigma_2)\sigma_2-8\sigma_2^2=z^2+6\sigma_2z\geq 0.$$

Deoarece $\sigma_2 \geq 0$; $z \geq 0$, rezultă: $a^4 + 2a^3b + 2ab^3 + b^4 \geq 6a^2b^2$.

8) Să se demonstreze că dacă a, b sunt numere strict pozitive având suma 1, atunci are loc inegalitatea:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^n+\left(b+\frac{1}{b}\right)^n\geq\frac{5^n}{2^{n-1}}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

Soluție. Considerăm funcția $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ care este convexă pe $[0, +\infty)$. Aplicând Jensen rezultă: $f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Punând $x=a+\frac{1}{a}; y=b+\frac{1}{b}$ obținem:

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^n+\left(b+\frac{1}{b}\right)^n\geq 2\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\right]^n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(1+\frac{1}{\sigma_2}\right)^n.$$

Dar: $\sigma_1^2\geq 4\sigma_2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma_2}\geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma_2}+1\geq 5$. Obținem: $\left(a+\frac{1}{a}\right)^n+\left(b+\frac{1}{b}\right)^n\geq\frac{5^n}{2^{n-1}}$.

9) Să se demonstreze că pentru orice numere strict pozitive x, y are loc şirul de inegalități:

$$\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{x^2}\geq\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq\left(\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)\geq\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2\left(\frac{x+y}{4}\right)\geq$$

$$\geq\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)\geq x+y+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\frac{(x-y)^2}{x+y}\geq\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{x}\right)+\frac{3}{4}(x+y)\geq$$

$$\geq\frac{2\left(x^2+x^2\right)}{x+y}\geq x+y. \text{ (Marius Drăgan)}$$

Soluție. Se aplică raționamentul expus la punctul anterior.

O altă metodă, folosind aceeaşi transformare, $x + y = \sigma_1$; $xy = \sigma_2$ constă în studiul semnului funcțiilor de gradul I şi II.

Exemple

1) Fie x, y, z numere reale pozitive pentru care: $x + y + z = 1$. Să se demonstreze că:

$0\leq xy+yz+zx-2xyz\leq\frac{7}{27}$. (O.I.M., 1984)

Soluție. Deoarece: $x + y + z = 1$, rezultă $z = 1 - \sigma_1$, unde $z \in [0, 1]$; înlocuind ingalitatea din enunț devine: $0\leq\sigma_2+\sigma_1(1-\sigma_1)-2\sigma_2(1-\sigma_1)\leq\frac{7}{27}$.

Considerăm funcția de grad I $f:\left[0, \frac{\sigma_1^2}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $f(\sigma_2)=25(2\sigma_1-1)\sigma_2+\sigma_1-\sigma_1^2$,

σ_1 fixat $f(0)=\sigma_1(1-\sigma_1)\geq 0$

$$f\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right)=\frac{\sigma_1^2}{4}\cdot(2\sigma_1-1)+\sigma_1(1-\sigma_1)=\frac{\sigma_1\left(2\sigma_1^2-\sigma_1+4-4\sigma_1\right)}{4}=\frac{\sigma_1\left(2\sigma_1^2-5\sigma_1+4\right)}{4}>0\,.$$

Egalitatea are loc pentru $\sigma_1 = 0$ sau $\sigma_1 = 1$ adică (1, 0, 0).

Pentru partea a doua a inegalității considerăm funcția $g:\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]\to\mathbb{R}$,

$g(\sigma_2)=27(2\sigma_1-1)\sigma_2-27\sigma_1(\sigma_1-1)-7$, $g(0)=27\sigma_1^2+27\sigma_1-7\le 0$, deoarece:

$$\Delta=-27<0,\ g\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right)=\frac{27(2\sigma_1-1)*\sigma_1^2}{4}-27\sigma_1(\sigma_1-1)-7=\frac{1}{4}(3\sigma_1-2)^2(6\sigma_1-7)\le 0\,.$$

Rezultă: $g(\sigma_2)\ge 0,(\forall)\sigma_2\in\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]$.

Egalitatea are loc pentru: $\sigma_1=\frac{2}{3}$. $x+y=\frac{2}{3}; z=1-x-y$.

Rezultă: $x=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{3}; z=\frac{1}{3}$ pentru cazul de egalitate.

2) Fie x, y, z trei numere pozitive ce satisfac condiția: $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$. Să se demonstreze că: $2(xy + yz + zx) \le x + y + z$. (I.V. Maftei)

Soluție. Fie $x + y = \max\{x + y, y + z, z + x\}$. (Marius Drăgan)

Notăm $x + y = \sigma_1$, $xy = \sigma_2$ condiția din enunț este echivalentă cu:

$$\sigma_1^2-2\sigma_2+z^2+2\sigma_2 z=1\Leftrightarrow\sqrt{\sigma_2^2+2\sigma_2+1-\sigma_1^2}-\sigma_2.$$

Înlocuind inegalitatea de demonstrat devine:

$$2\sigma_2+2\sigma_1\left(\sqrt{\sigma_2^2+2\sigma_2+1-\sigma_1^2}-\sigma_2\right)\le\sigma_1+\sqrt{\sigma_2^2+2\sigma_2+1-\sigma_1^2}-\sigma_2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sigma_2^2+2\sigma_2+1-\sigma_1^2}\,(2\sigma_1-1)\le 2\sigma_1\sigma_2-3\sigma_2+\sigma_1.$$

Se arată că ambii membri sunt pozitivi.

Ridicând la pătrat şi efectuând calculele vom obține:

$$(8\sigma_1-8)\sigma_2^2+\left(4\sigma_1^2-2\sigma_1+2\right)\sigma_2-4\sigma_1^4+4\sigma_1^3+2\sigma_1^2-4\sigma_1+1\le 0\,.$$

Considerăm funcția

$$f:\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]\to\mathbb{R}\ \ f(\sigma_2)=(8\sigma_1-8)\sigma_2^2+\left(4\sigma_1^2-2\sigma_1+2\right)\sigma_2-4\sigma_1^4+4\sigma_1^3+2\sigma_1^2-4\sigma_1+1\,.$$

Avem: $1 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \le (x + y)^2 + z^2$. Deoarece $x + y \ge y + z \ge z$, rezultă: $2(x\,y)^2\ge(x+y)^2+z^2\ge 1\Leftrightarrow x+y\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dar $x \le 1$, $y \le 1$. Deci $\frac{1}{\sqrt{2}}\le\sigma_1\le 2$.

Vom demonstra că: $f(\sigma_2)\le 0, (\forall)\sigma_2\in\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]$.

Cazul 1: $\sigma_1 \in (1, 2]$

În acest caz este suficient să demonstrăm că: $f(0)\le 0$ şi $f\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right)\le 0$

$f(0) = -4\sigma_1^4+4\sigma_1^3+2\sigma_1^2-4\sigma_1+1$.

Considerăm funcţia: $F(0) = -4\sigma_1^4+4\sigma_1^3+2\sigma_1^2-4\sigma_1+1$.

Calculăm: $F^1(\sigma_1) = 4(-4\sigma_1^3+3\sigma_1^2+\sigma_1-1)$.

$F^1(\sigma_1) = 4\left(-12\sigma_1^2+6\sigma_1+1\right) \le 0$ deoarece $\sigma_1>1>\frac{3+\sqrt{21}}{12}$.

Deci F^1 este descrescătoare pe (1, 2]. Rezultă $F^1(\sigma_1) \le F^1(1) < 0$ de unde rezultă F este descrescătoare pe (1, 2]. Deci $F(\sigma_1) \le F(1) < 0$. În concluzie $f(0) \le 0$.

Calculăm: $f\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right)=\frac{(\sigma_1+1)(\sigma_1-1)\left(\sigma_1^2-6\sigma_1+2\right)}{2}<0$ deoarece $\sigma_1^2-6\sigma_1+2<-3<0$.

Cazul 2: $\sigma_1\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$

Arătam: $\frac{\sigma_1^2}{4}<\sigma_2\nu \Leftrightarrow \frac{\sigma_1^2}{4}<\frac{4\sigma_1^2-2\sigma_1+2}{16(1-\sigma_1)} \Leftrightarrow 2\sigma_1^2(1-\sigma_1)<2\sigma_1^3-\sigma_1+1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\sigma_1^2-1\right)\sigma_1+1>0$ inegalitate adevărată deoarece: $2\sigma_1^2-1>0$.

Dar: $f\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right)=\frac{(\sigma_1+1)(\sigma_1-1)^2\left(\sigma_1^2-6\sigma_1+2\right)}{2}<0$ deoarece: $\sigma_1^2-6\sigma_1+2<\frac{5-6\sqrt{2}}{2}<0$.

Rezultă, pentru $\sigma \in \left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]$, $f(\sigma_2)<0$.

Deci $f(\sigma_2)\le 0, (\forall)\sigma_2\in\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]$ şi $\sigma_1\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}},2\right]$.

3) Să se demonstreze că pentru orice numere pozitive x, y, z are loc inegalitatea:

$(x+y+z)^3 \ge 27xyz+\frac{x(y+z-2x)^2}{4}$. (Marius Drăgan)

Soluţie. $\frac{y}{x}+\frac{z}{x}=\sigma_1$. $\frac{y}{x}\frac{z}{x}=\sigma_2$.

Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu: $(1+\sigma_1)^3 \le 27\sigma_2 + \frac{(\sigma_1-2)^2}{4}$.

Deoarece: $\frac{\sigma_1^2}{4} \ge \sigma_2$ este suficient să demonstrăm că: $(1+\sigma_1)^3 \ge \frac{27\sigma_1^2}{4} + \frac{(\sigma_1-2)^2}{4}$

inegalitate echivalentă cu $4\sigma_1(\sigma_1 - 2)^2 \ge 0$.

Inegalitatea din enunț poate fi întărită astfel:

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \ge \max\left\{\frac{x(y+z-2x)^2}{4}, \frac{y(x+z-2y)^2}{4}, \frac{z(x+y-z)^2}{4}\right\}.$$

4) Să se demonstreze că pentru orice numere pozitive x, y, z are loc inegalitatea:

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \ge \frac{(x+y-2z)^2(4x+4y+z)}{4}.$$ (Marius Drăgan)

Soluție. Notăm $\frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \sigma_1$. $\frac{y}{x}\frac{z}{x} = \sigma_2$.

Inegalitatea din enunț se scrie sub forma: $(1+\sigma_1)^3 - 27\sigma_2 \ge \frac{(\sigma_1-2)^2(4\sigma_1+1)}{4}$.

Deoarece: $\frac{\sigma_1^2}{4} \ge \sigma_2$ este suficient să demonstrăm că:

$(1+\sigma_1)^3 - 27\frac{\sigma_1^2}{4} \ge \frac{(\sigma_1-2)^2(4\sigma_1+1)}{4}$ egalitate adevărată.

De asemenea, avem inegalitatea:

$$(x+y+z)^3 - 27xyz \ge \max\left\{\frac{(x+y+z)^2(4x+4y+4z)}{4}, \frac{(y+z-2x)^2(4y+4z+x)}{4}, \frac{(z+x-2y)^2(4z+4x+y)}{4}\right\}.$$

5) Să se demonstreze că pentru orice $x, y, z > 0$, avem inegalitatea:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge \left(\frac{y+z}{\sqrt{yz}}+1\right)^2.$$ (Marius Drăgan – Concursul Arhimede, 2007)

Soluție. Notăm: $y + z = \sigma_1$; $yz = \sigma_2$.

Inegalitatea din enunț devine:

$$(x+\sigma_1)\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{\sigma_2}\right) \ge \left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2}}+1\right)^2 \Leftrightarrow 1+\frac{\sigma_1 x}{\sigma_2}+\frac{\sigma_1}{x}+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \ge \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2}+\frac{2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2}}+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma_1\left(\frac{x}{\sigma_2}+\frac{1}{x}\right)\geq \frac{2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2}}$$ echivalentă cu:

$$5\left(\frac{x}{\sigma_2}+\frac{1}{x}\right)\geq \frac{2\sigma_1}{\sqrt{\sigma_2}}=\sigma_1\left(\frac{x}{\sigma_2}+\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{\sigma_2}}\right)=\sigma_1\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sigma_2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geq 0\,.$$

6) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere reale cu suma pozitivă, atunci are lor inegalitatea: $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Soluție. Notăm: $b + c = \sigma_1$; $bc = \sigma_2$.

Inegalitatea din enunț se va scrie:

$a^3 + \sigma_1^3 - 3\sigma_2(\sigma_1 + a) \geq 0 \Leftrightarrow (\sigma_1 + a)(\sigma_1^2 - a\sigma_1 + a^2 - 3\sigma_2) \geq 0.$

Deoarece $\sigma_1 + a \geq 0$, rămâne să demonstrăm că: $\sigma_1^2 - a\sigma_1 + a^2 - 3\sigma_2 \geq 0$.

Dar, deoarece $\frac{\sigma_1^2}{4}\geq \sigma_2$, este suficient să demonstrăm că: $\sigma_1^2 - a\sigma_1 + a^2 - \frac{3\sigma_1^2}{4} =$

$=\frac{(\sigma_1-2a)^2}{4}\geq 0.$

Comentariu. Inegalitatea este foarte cunoscută şi foarte des utilizată. Se poate da şi o demonstrație directă.

7) Să se arate că pentru oricare numere pozitive a, b, c are loc inegalitatea: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.

Soluție. Notăm: $\begin{cases}\sigma_1=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\\ \sigma_2=\frac{b}{a}\frac{c}{a}\end{cases}$ $a \neq 0$ (Cazul $a = 0$ este evident.).

Inegalitatea din enunț devine:

$$1+\left(\sigma_1^2-2\sigma_2\right)^2-2\sigma_2^2\geq \sigma_2(1+\sigma_1)\Leftrightarrow 2\sigma_2^2-\left(4\sigma_1^2+\sigma_2+1\right)+1+\sigma_1^4\geq 0\,.$$

Considerăm funcția $f:\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]\to \mathbb{R}$, $f(\sigma_2)=2\sigma_2^2-\left(4\sigma_1^2+\sigma_1+1\right)\sigma_2+1+\sigma_1^2$

$$f(0)=1+\sigma_1^4>0\,,\ f\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right)=\frac{(\sigma_1-2)^2\left(25^2+25+2\right)}{4}\geq 0\,.$$

De asemenea: $\frac{\sigma_1^2}{4}<\sigma_2 v=\frac{4\sigma_1^2+\sigma_1+1}{4}$. Rezultă: $f(\sigma_2)\geq 0$, $(\forall)$ $\sigma_2\in\left[0,\frac{\sigma_1^2}{4}\right]$.

Comentariu. Inegalitatea este des utilizată şi se poate da o soluție directă.

8) Să se demonstreze că pentru orice numere pozitive a, b, c este adevărată inegalitatea:

$8(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq 9(a^2 + bc)(b^2 + ac)(c^2 + ab)$.

(I.V. Maftei, L. Toderiuc, I.M.A.C., 2007).

Soluție. Notăm: $\begin{cases} \frac{b}{a} = x \\ \frac{c}{a} = y \end{cases} \begin{cases} x^3 + y^3 = \sigma_1 \\ x \cdot y = \sigma_2 \end{cases}$, $a \neq 0$ (Cazul $a = 0$ este evident.).

Inegalitatea din enunț devine:

$8(x^3 + y^3 + 1)^2 \geq 9(x^2 + y)(y^2 + x)(1 + x \cdot y) \Leftrightarrow 8(\sigma_1 + 1)^2 \geq 9(\sigma_1 + \sigma_2^2 + \sigma_2)(\sigma_2 + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\sigma_2^3 + 18\sigma_2^2 + \sigma_2(9 + 9\sigma_1) - 8\sigma_1^2 - 7\sigma_1 - 8 \leq 0$.

Dar: $x^3 + y^3 \geq 2\sqrt{x^3 \cdot y^3} \Leftrightarrow \sigma_1^2 \geq 4\sigma_2^3$.

Notăm: $u^3 = \frac{\sigma_1}{2}$. Rezultă: $\sigma_2 \leq u^2$. Deci:

$9\sigma_2^3 + 18\sigma_2^2 + (9 + 9\sigma_1)\sigma_2 - 8\sigma_1^2 - 7\sigma_1 - 8 \leq 9u^6 + 18u^4 + (9 - 18u^3)u^2 - 32\sigma_1^6 - 14u^3 - 8.$

Rămâne să demonstrăm că:

$23u^6 - 18u^5 - 18u^4 + 14u^3 - 9u^2 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (u - 1)^2 \cdot (23u^4 + 28u^3 + 15u^2 + 16u + 8 \geq 0$.

Cu egalitate pentru $u = 1$ şi $x = y$, adică $x = y = 1$, de unde rezultă $a = b = c$.

9) Să se demonstreze că dacă x, y, $z \geq 0$, atunci are loc inegalitatea:

$x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z)$.

(Olimpiada de matematică din Republica Moldova – faza finală, 1993)

Soluție. Notăm: $\begin{cases} \frac{x}{z} + \frac{y}{z} = \sigma_1 \\ \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{z} = \sigma_2 \end{cases}$, $z \neq 0$ (Cazul $z = 0$ este evident.).

Inegalitatea din enunț devine: $\sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) + 5 - 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \geq (\sigma_2 + 1 - \sigma_1)(\sigma_1 - 1)$

sau $(5 - 4\sigma_1)\sigma_2 + (\sigma_1 + 1)(8\sigma_1 - 1)^2 \geq 1$.

Definim funcția: $f : \left[0, \frac{\sigma_1^2}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $f(\sigma_2) = (5 - 4\sigma_1)\sigma_2 + (\sigma_1 + 1)(\sigma_1 - 1)^2$,

$f(0) = (\sigma_1 + 1)(\sigma_1 - 1) \geq 0$.

Calculăm: $f\left(\frac{\sigma_1^2}{4}\right) = \frac{(\sigma_1 - 2)^2}{4} \geq 0$. Rezultă: $f(\sigma_2) \geq 0$, $(\forall)$ $\sigma_2 \in \left[0, \frac{\sigma_1^2}{4}\right]$.

Egalitatea are loc pentru $\sigma_1 = 2$, adică $x = y = z$ şi pentru: $x = z$, $y = 0$.

Comentariu. Tehnica utilizată se dovedeşte a fi de mare eficienţă, ceea ce întăreşte importanţa metodei.

6.2. Demonstrarea unor inegalităţi cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale în trei variabile

Definiţie

Polinomul $p \in \mathbb{R}[x, y, z]$ este simetric în variabilele x, y, z, dacă oricare ar fi permutarea σ a variabilelor x, y, z avem: $\sigma(p) = p$, mai precis oricare ar fi x, y, z, polinomul p satisface: $p(x, y, z) = p(x, z, y) = p(y, x, z) = p(z, x, y) = p(z, y, x) = p(y, z, x)$.

De reţinut: Polinoamele:

$\sigma_1 \in \mathbb{R}[x, y, z]$, $\sigma_1 = x + y + z$; $\sigma_2 \in \mathbb{R}[x, y, z]$, $\sigma_2 = xy + yz + zx$;

$\sigma_3 \in \mathbb{R}[x, y, z]$, $\sigma_3 = xyz$ se numesc *polinoame simetrice fundamentale*.

Mai întâi ne vom folosi de următoarea Lemă.

Lemă

Vom arăta că polinoamele $S_k = x^k + y^k + z^k$ se pot exprima cu ajutorul polinoamelor $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Demonstraţie: Pentru aceasta vom stabili următoarea formulă de recurenţă:

$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}$, $(\forall)\ k \geq 3$, $(S_0 = 3,\ S_1 = \sigma_1,\ S_2 = \sigma_2)$ (1)

Înlocuim $S_{k-3}, S_{k-2}, S_{k-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ prin expresiile lor:

$(x + y + z)(x^{k-1} + y^{k-1} + z^{k-1}) - (xy + yz + zx)(x^{k-2} + y^{k-2} + z^{k-2}) +$

$+ xyz(x^{k-3} + y^{k-3} + z^{k-3}) = x^k + y^k + z^k + xy^{k-1} + xz^{k-1} + yx^{k-1} + zy^{k-1} +$

$+ yz^{k-1} + zx^{k-1} - (x^{k-1}y + xy^{k-1} + x^{k-1}z + xz^{k-1} + y^{k-1}z + yz^{k-1} +$

$+ xyz^{k-2} + xy^{k-2}z + x^{k-2}yz) + x^{k-2}yz + xy^{k-2}z + xyz^{k-2} = x^k + y^k + z^k$.

Teorema 1

Orice polinom simetric în trei variabile x, y, z se poate exprima în mod unic cu ajutorul polinoamelor simetrice fundamentale.

Din formula (1) se deduce formula lui Waring:

$$\frac{1}{k} S_k = \sum \frac{(-1)^{k-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3} (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3!} \sigma_1^{\lambda_1} \cdot \sigma_2^{\lambda_2} \cdot \sigma_3^{\lambda_3}, \text{ unde}$$

$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = k$. (2)

Aplicând (2), calculăm S_k $(k = 3, 4, 5, 6)$ şi obţinem:

1) $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

2) $S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$.